

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ
ХІІІ НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ
<http://astro-olymp.org>

Областен кръг, 6 март 2010 г.

Ученици от 11-12 клас – решения

1 задача.

Австралийското червено кенгуру тежи около 90 kg и може да скача на височина около 3 m.

- На каква височина би могло да скочи кенгуруто, ако се намира на Луната? Предполагаме, че и там то се отгласква от повърхността на Луната със същата начална скорост, както от Земята, и че е с високотехнологичен лек скафандър, който не го затруднява допълнително. Ускорението на силата на тежестта на лунната повърхност е 6 пъти по-малко от земното ускорение.



- Кенгуруто се намира в голяма равнина близо до южния лунен полюс, на място, откъдето Земята не се вижда, но най-горната точка на видимия земен диск се опира в самия хоризонт. Ще може ли кенгуруто при своя отскок да зърне родната си Австралия? Обосновете своя отговор.

Решение:

Да означим началната скорост, с която кенгуруто отскача от повърхността на Земята или на Луната с v_0 , земното ускорение с g , а височината, на която се издига, с h . В сила са следните съотношения:

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$
$$v_0 - gt = 0$$

където t е времето, за което се достига максималната височина. Оттук получаваме:

$$h = v_0^2 / g$$

За височината, на която кенгуруто може да скочи, ако се намира на Луната, получаваме аналогично:

$$h_L = v_0^2 / g_L$$

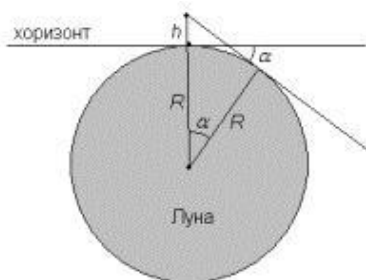
където g_L е ускорението на силата на тежестта на Луната. Тъй като $g_L / g = 1 / 6$, то намираме, че $h_L / h = 6$, или на Луната кенгуруто ще може да скочи на $6 \times 3 = 18$ метра височина.

Когато кенгуруто се намира в най-високата точка то своя скок, то физическия лунен хоризонт за него се понижава с ъгъл α , за който можем да напишем:

$$\cos \alpha = \frac{R_L}{R_L + h}$$

където R_L е радиусът на Луната. Оттук намираме:

$$\alpha \approx 15.6' \text{ (дъгови минути)}$$



Видимият от Луната ъглов диаметър на Земята ще бъде:

$$\delta = \frac{2R_T}{r} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\delta \approx 1.9^\circ \approx 1^\circ 54' = 114'$$

Следователно при отскока на кенгуруто над хоризонта за него ще се появи доста малка част от Земята. Тъй като кенгуруто се намира близо до южния лунен полюс, то от Земята ще се открият райони около южния земен полюс. Все пак, части от Австралия могат да се видят. Поради наклона на земната ос и наклона на лунната орбита в някои случаи могат да се създадат условия за видимост на по-голяма част или даже на почти целия континент Австралия. Това може да стане, когато взаимната ориентация на оста на Земята и на лунната орбита е такава, че северният земен полюс е наклонен към Луната, а лунната орбита е наклонена в противоположна посока.

Критерии за оценяване (10т.):

За правилна физическа обосновка и пресмятания по първото подусловие – 3 т.

За верен числен отговор – 1 т.

За пресмятане на понижението на хоризонта при отскока – 2 т.

За сравнение с видимите ъглови размери на Земята и разсъждения относно видимостта на Австралия в общия случай – 2 т.

За съображения, свързани с най-добрите условия за видимост на Австралия – 2 т.

2 задача. В таблицата са дадени координатите на звездите Сириус и Процион. В даден момент наблюдател в точка А на земната повърхност вижда Сириус в зенита. Час и половина по-късно наблюдател в точка В вижда Процион в горна кулминация на височина 85 градуса над хоризонта. Намерете приблизително разстоянието между двата пункта в километри.

Звезда	Ректасцензия	Деклинация
Сириус	6h 45m 37s	-16°43'39"
Процион	7h 39m 18s	+05°13'29"

Решение:

Първо да определим разликата в географските дължини на двете точки от земната повърхност. Превръщаме интервала време t между двете наблюдения в единици звездно време:

$$\Delta t_{sid} \approx \frac{366}{365} \cdot \Delta t \approx 1^h 30^m 15^s$$

(в единици звездно време)

От това време изваждаме разликата в ректасцензиите на двете звезди, за да получим разликата в географските дължини на наблюдателите. Получаваме, че разликата е:

$$\Delta \lambda = 0^h 36^m 34^s,$$

като пункт В се намира на запад от пункт А. Нека превърнем тези единици в градусна мярка за по-лесни пресмятания.

$$\Delta \lambda^\circ = 15 \cdot \Delta \lambda^h = 9^\circ 08' 30'' = 9^\circ.1417$$

Тъй като се иска приблизително решение и поради близостта на двете точки до екватора ние няма да ползваме сферична тригонометрия и няма да отчитаме влиянието на географската ширина на двата пункта върху разстоянието по географска дължина в градуси и километри.

Сега да определим разликите в географските ширини. В пункт А наблюдателят вижда Сириус в зенита. Следователно географската ширина на пункт А е равна на деклинацията на Сириус:

$$\varphi_A = -16^\circ 43' 39'' = -16^\circ.7275$$

В пункт В наблюдателят вижда звездата в горна кулминация на височина 85° . Следователно географската ширина на наблюдателя се различава с 5 градуса от деклинацията на Процион. Тъй като не е посочено в коя посока се наблюдава кулминацията, трябва да разгледаме два случая. Първи случай – кулминацията се наблюдава на юг и втори случай – кулминацията се наблюдава на север. В първия случай, за да получим географската ширина на пункта, към деклинацията на звездата добавяме 5 градуса. Във втория – изваждаме 5 градуса. За първия случай получаваме:

$$\varphi_{B1} = 10^\circ 13' 29'' = 10^\circ.2247$$

а за втория:

$$\varphi_{B2} = 0^\circ 13' 29'' = 0^\circ.2247$$

Намираме разликите в географските ширини:

$$\Delta\varphi_1 = \varphi_{B1} - \varphi_A = 26^\circ.9522$$

$$\Delta\varphi_2 = \varphi_{B2} - \varphi_A = 16^\circ.9522$$

Виждаме, че и двата пункта се намират близо до екватора. Близо до екватора координатната мрежа на географските координати не се различава много от правоъгълната. Двата пункта са сравнително близо един до друг. Освен това в задачата се иска приблизително определяне на разстоянието. Затова ще заместим сферичната координатна система с правоъгълна координатна система в равнина и ще решаваме задачата като планиметрична. Използваме теоремата на Питагор и определяме разстоянието между двата пункта в ълови единици за двата случая:

$$s_1 = \sqrt{\Delta\lambda^2 + \Delta\varphi_1^2} = 28^\circ.4604$$

$$s_2 = \sqrt{\Delta\lambda^2 + \Delta\varphi_2^2} = 19^\circ.2600$$

Пълната обиколка на Земята е $L = 2\pi R \approx 40024$ км, където R е радиусът на Земята. На тази дължина съответстват 360° в ълови единици. Следователно на всеки градус съответстват $40024/360^\circ \approx 111.18$ км/°. Пресмятаме двете разстояния в километри и получаваме:

$$s_1 \approx 3164 \text{ km}$$

$$s_2 \approx 2141 \text{ km}$$

Критерии за оценяване (10т.):

За определяне на разликата в географските дължини и съобразяване в каква посока е точка В спрямо точка А – 3 т.

За определяне на географската ширина на пункт В – 2 т.

За определяне на разликата в географските ширини на двата пункта – 2 т.

За определяне на разстоянието между пунктовете – 3 т.

Забележка: В случай, че не са разгледани двата случая на кулминация на Процион за пункт В да се отнемат общо 2 точки от оценката на цялото решение, но не и да се отнемат “наказателни точки” за всеки от последващите моменти от решението, които са следствие от разглеждането на двата случая.

3 задача. Най-благоприятният период за наблюдение на една външна планета е времето около нейното противостоене, когато тя е най-близо до Земята и се вижда през цялата нощ. Периодът на обикаляне на Юпитер около Слънцето е около 12 години. През цялата 2001 г. не е имало противостоене на Юпитер.

- Приблизително кога е било последното противостоене на Юпитер преди 2001 г.?
- Приблизително в кое съзвездие трябва да се е наблюдавала планетата тогава?
- Може ли и с други планети от Слънчевата система да се случи през цяла една година да не бъдат в противостоене?

Решение:

Противостоене може да имат само външните планети. Противостоене или опозиция на една планета се случва, когато Слънцето, Земята и планетата застанат в този ред, приблизително на една линия. Тогава за земния наблюдател планетата се намира на небесната сфера най-близо до точката, противоположна на точката, в която се намира Слънцето.

Времето между две поредни опозиции зависи от орбиталния период на планетата и от орбиталния период на Земята. При хипотеза за кръгови орбити, то е равно на синодичния период на планетата относно Земята. Нека разгледаме случая с Юпитер. За синодичния период T_{JS} може да напишем уравнението:

$$\frac{1}{T_{JS}} = \frac{1}{T_E} - \frac{1}{T_J}$$

където T_J е сидеричният период на Юпитер, а T_E е периодът на обикаляне на Земята около Слънцето.

$$T_{JS} = \frac{T_J T_E}{T_J - T_E} = 1.09 \text{ yr} \approx 398.5 \text{ d}$$

Ако приемем, че в годината има 365 дни, а в месеца средно 30.5 дни, то между две опозиции на Юпитер изминава приблизително 1 година 1 месец и 3 дни. Тогава, ако противостоенето на Юпитер през 2000 година се е случило в периода от 28 ноември до 31 декември, то през следващата година не би трябвало да има противостоене. Следващото противостоене би трябвало да бъде някъде в периода от 1 януари до 3 февруари 2002 година, в зависимост от това точно на коя дата се е случило противостоенето през 2000 година. *И наистина, противостоенето на Юпитер през 2000 година е било на 28 ноември, а през 2002 година – на 1 януари.*

В кое съзвездие се е намирал Юпитер може да съобразим като знаем, че той е в противоположна на Слънцето точка на небесната сфера, както и като знаем в кое съзвездие се намира Слънцето тогава. В края на ноември и през декември Слънцето е последователно в съзвездията Скорпион, Змиеносец и Стрелец. Юпитер би трябвало да е в противоположните на тях съзвездия – Бик и Близнаци. *Действително, в момента на противостоенето си, на 28 ноември 2000 година, Юпитер се е наблюдавал в съзвездие Бик.*

Синодичният период на всички външни планети е по-голям от 1 година. Ако противостоенето на една планета е много близо до края на дадена година, така че останалото време до края на годината прибавено към една година да е по-малко от синодичния период на планетата, то през следващата година тази планета няма да има противостоене. То ще се случи в началото на по-следващата година.

Критерии за оценяване (10т.):

За определяне на синодичния период на Юпитер – 3 т.

За определяне на интервала от време, когато може да е било противостоенето преди 2001 г. – 2 т.

За определяне на съзвездие, в което може да е бил Юпитер и обяснение – 3 т.

За верен отговор и обяснение на последното подусловие – 2 т.

4 задача. В повестта на забележителния писател фантаст Айзък Азимов „Пиратите от астероидите“ се разказва как главният герой Лъки Стар попада в плен на космически пирати, които го закарват на един астероид. Живеещият там отшелник му разказва, че веднъж на 3.5 години Юпитер е най-близо до астероида и се вижда като стъкло топче.

- Намерете видимия ъглов диаметър на Юпитер тогава.
- Ако наблюдаваме Юпитер от по-близо разстояние, той сигурно ще изглежда наистина великолепен. Представете си, че сте на спътника на Юпитер Амалтея с радиус на орбитата около Юпитер 181 000 км. Какъв ще бъде видимият ъглов диаметър на планетата?

Решение:

От условието става ясно, че $T_S = 3.5$ години е периодът между две опозиции на Юпитер за наблюдател на астероида с отшелника, т.е. това е синодичният период на Юпитер за астероида. Като знаем сидеричния период на Юпитер $T = 11.86$ години, можем да намерим сидеричния период на астероида T_A от съотношението:

$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T}$$

$$T_A = \frac{T_S \cdot T}{T_S + T}$$

$$T_A \approx 2.7 \text{ yr}$$

Използвайки III закон на Кеплер, можем да намерим радиуса на орбитата на астероида a_A . Ако a_A се измерва в астрономически единици, а T_A в години, то III закон на Кеплер може да се запише така:

$$\frac{a_A^3}{T_A^2} = 1$$

Оттук получаваме:

$$a_A = \sqrt[3]{T_A^2}$$

$$a_A \approx 1.94 \text{ AU}$$

Когато Юпитер е в опозиция, той се намира на разстояние от астероида:

$$\Delta r = a - a_A$$

където a е радиусът на орбитата на Юпитер. Тогава видимият ъглов диаметър на Юпитер, в опозиция, гледан от астероида, е:

$$\delta = \frac{2R}{\Delta r} = \frac{2R}{a - a_A}$$

За да изразим δ в дъгови минути, умножаваме получения по горната формула резултат на $180^\circ \cdot 60' / \pi$ и получаваме:

$$\delta \approx 1'$$

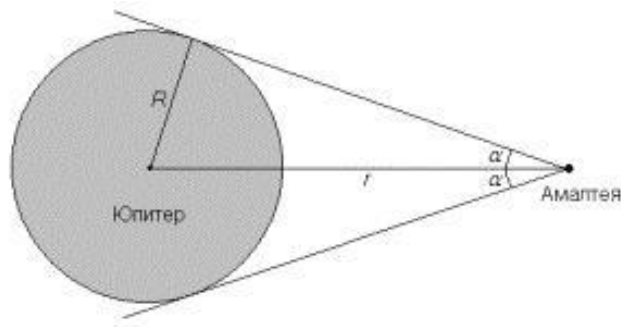
Амалтея е един от най-близките спътници на Юпитер. Виждаме, че радиусът на Юпитер е само около 2.5 пъти по-малък от радиуса на орбитата на Амалтея около Юпитер. Следователно, за да намерим видимия от Амалтея ъглов диаметър на Юпитер, ще трябва да направим по-точно изчисление. От чертежа виждаме, че видимият диаметър на Юпитер ще бъде равен на 2α . За ъгъла α можем да напишем:

$$\sin \alpha = R/r$$

където r е радиусът на орбитата на Амалтея. За видимия ъглов диаметър на Юпитер получаваме:

$$2\alpha \approx 46^\circ$$

Това би било наистина впечатляващо – видимият диаметър на Юпитер би заемал една четвърт от разстоянието от хоризонт до хоризонт!



Критерии за оценяване (10т.):

За разбирането, че Юпитер е най-близо до астероида, когато е в опозиция – 1 т.

За намиране на орбиталния период на астероида – 2 т.

За намиране на разстоянието от астероида до Юпитер в опозиция – 2 т.

За намиране на видимия ъглов диаметър на Юпитер от астероида – 2 т.

За правилно геометрично представяне на видимия ъглов диаметър на Юпитер от Амалтея – 1 т.

За вярна формула и верен числен отговор – 2 т.

5 задача. Сириус и Прочион са едни от най-близките до нас звезди. През 1844 година великият немски астроном Фридрих Бесел забелязва, че траекториите им по звездното небе са странни вълнообразни линии. Той предполага, че всяка от тези звезди има спътник, с маса почти колкото Слънцето. Твърдението е посрещнато с недоверие, защото звездите-спътници би трябвало ясно да се виждат. Но по-късно спътниците на Сириус и Прочион са открити чрез астрономически наблюдения като много слаби звезди. Изглеждаше много странно толкова масивни звезди да имат толкова малък видим блясък на толкова малки разстояния от нас. Впоследствие обектите, подобни на тези необикновени звезди, са наречени бели джуджета.

- Какви са типичните размери на белите джуджета?
- Звездата Прочион е с радиус два пъти по-голям от радиуса на Слънцето, видима звездна величина 0.34^m и температура 6650 К. Нейният спътник Прочион В има звездна величина 10.7^m и температура 7740 К. Докажете, че Прочион В е бяло джудже.

Упътване: Мощността на светене (светимостта) на една звезда е пропорционална на втората степен на нейния радиус и четвъртата степен на температурата на звездата.

Решение:

Белите джуджета са извънредно плътни обекти, в които се превръщат звездите с не много големи маси в края на своята еволюция. Характерните размери на белите джуджета са сравними с размерите на Земята.

Отношението на осветеностите E и E_B , които създават звездата Прочион и нейният спътник намираме по формулата на Погсън:

$$\frac{E}{E_B} = 2.512^{m_B - m}$$

където m и m_B са звездните величини на Прочион и Прочион В.

$$\frac{E}{E_B} \approx 13900$$

Тъй като Прочион и Прочион В са на практически еднакво разстояние от нас, можем да смятаме, че светимостта на Прочион В L_B е също 13 900 пъти по-слаба от светимостта на

Процион L . Да означим радиусите на двете звезди съответно с R_B и R , а температурите – с T_B и T . За светимостите можем да напишем:

$$\frac{L_B}{L} = \frac{R_B^2 T_B^4}{R^2 T^4}$$

Оттук получаваме:

$$\frac{R_B}{R} = \left(\frac{T}{T_B}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{L_B}{L}}$$

$$\frac{R_B}{R} \approx 0.0063$$

От реципрочната стойност на този резултат виждаме, че Процион В е около 160 пъти по-малък по диаметър от Процион. Звездата Процион е два пъти по-голяма по диаметър от Слънцето. Като знаем, че Земята е около 110 пъти по-малка по диаметър от Слънцето, стигаме до извода, че спътникът Процион В е сравним по размери със Земята. Така че най-вероятно този обект е бяло джудже. По-точно, Процион В е $160/2 \approx 80$ пъти по-малък от нашето Слънце, или $110/80 \approx 1.38$ пъти по-голям от Земята. Като използваме диаметъра на Земята, за диаметъра на Процион В получаваме около 17 500 км.

Тъй като температурите на Процион и Процион В са различни, то и енергията в техните спектри е разпределена различно. При нашите оценки ние използваме видимите, а не болометричните звездни величини на двете звезди. Това води до известна неточност, поради която полученият от нас размер на Процион В съвсем леко се различава от истинския.

Критерии за оценяване (10т.):

За първото подусловие – 1 т.

За пресмятане на отношението на светимостите на Процион и Процион В – 3 т.

За пресмятане на отношението на радиусите – 3 т.

За обосновката защо Процион е бяло джудже – 3 т.

Справочни данни:

Радиус на Земята	6370 км
Радиус на Луната	1740 км
Разстояние от Земята до Луната	384 000 км
Радиус на Юпитер	71 000 км
Разстояние от Юпитер до Слънцето	5.2 AU
Орбитален период на Юпитер	11.86 години.
Разстояние от Земята до Слънцето	150 000 000 км.